DS de mathématiques n°9

Concours Blanc – Corrigé

Noté sur 116 pts ±5 pts pour le soin et la clarté,
puis la note est ramené sur 20 en multipliant par 20/95.

Le sujet comporte 3 exercices indépendants : un en algèbre et deux en analyse. Les deux premiers exercices sont plus simples et il est conseillé de les faire proprement.

1 Analyse : primitive d'une fonction gaussienne

/32,5

Dans tout le problème, on note Φ la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ qui s'annule en 0, c'est-à-dire que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi(x) = \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

(on ne cherchera pas à calculer cette intégrale).

/1,25 **1)** Justifier que la fonction Φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

> Φ est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\Phi'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Or, la fonction $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ comme composée de telles fonctions. Ainsi, Φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

/0,75 **2)** Étudier les variations de Φ.

> Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\Phi'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$. Ainsi, Φ est strictement croissante.

/1,5 **3)** Étudier la parité de Φ.

> Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
>
> $$\begin{aligned}\Phi(-x) &= \int_0^{-x} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= -\int_0^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad \text{avec } \begin{cases} t = -u \\ dt = -du \end{cases} \\ &= -\Phi(x)\end{aligned}$$
>
> Ainsi, Φ est impaire.

4) Étude en 0.

/1 **a)** Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de la fonction Φ'.

> Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
>
> $$\begin{aligned}\Phi'(x) &= e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= e^X \qquad \text{avec } X = -\frac{x^2}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \\ &= 1 + X + \underset{X\to 0}{o}(X) \\ &= \boxed{1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)}\end{aligned}$$

b) En déduire qu'il existe une constante $\alpha > 0$ que l'on précisera telle que

$$\Phi(x) = x - \alpha x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$

/1,5

> On intègre le DL obtenu en question précédente :
>
> $$\begin{aligned}\Phi(x) &= \Phi(0) + x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\end{aligned}$$
>
> On a donc le DL souhaité avec $\boxed{\alpha = \frac{1}{6}}$.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $\Psi(x) = \frac{\Phi(x)}{x}$. Prouver que la fonction Ψ est prolongeable par continuité en 0. On convient de noter encore Ψ la fonction ainsi prolongée sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de $\Psi(0)$.

/2

> Par ce qui précède, on a
>
> $$\begin{aligned}\Psi(x) &= \frac{\Phi(x)}{x} \\ &= 1 - \frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\end{aligned}$$
>
> On déduit de ce DL que $\lim\limits_{x\to 0} \Psi(x) = 0$. D'où Ψ est prolongeable par continuité en 0 en posant $\Psi(0) = \boxed{1}$.

/1 **d)** Démontrer que la fonction Ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et préciser la valeur de $\Psi'(0)$.

Par ce qui précède, on a

$$\Psi(x) = 1 + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

Comme Ψ admet un $\mathrm{DL}_1(0)$, on en déduit que Ψ est dérivable en 0 et que $\Psi'(0) = \boxed{0}$.

/2 **e)** Expliciter l'équation de la tangente à la courbe représentative de Ψ au point d'abscisse 0. Est-ce que Ψ admet un extremum local en 0 ?

Puisque $\Psi(0) = 1$ et $\Psi'(0) = 0$, Ψ admet une tangente en 0 d'équation $\boxed{y = 1}$. Par la question c), on a

$$\Psi(x) - 1 = \Psi(x) - \Psi(0) = -\frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$$

Donc $\Psi(x) - \Psi(0) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{6}$, ce qui entraine que $\Psi(x) - \Psi(0)$ est négatif au voisinage de 0. D'où Ψ admet un maximum local en 0.

5) Résolution d'une équation différentielle. On s'intéresse dans cette question à l'équation différentielle

$$(E) \quad xy' + y = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

/4 **a)** Résoudre l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$. On exprimera les solutions à l'aide de la fonction Ψ.

Sur $]0, +\infty[$, l'équation se réécrit :

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

L'équation homogène associée est :

$$(E_H) \quad y' + \frac{1}{x}y$$

Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $x \mapsto \ln|x|$, donc les solutions de (E_H) sont :

$$y_H(x) = Ce^{-\ln|x|} = \frac{C}{x} \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

On cherche une solution particulière de (E) par la variation de la constante. On pose

$$y_p(x) = \frac{C(x)}{x} \qquad \text{avec } C :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$$

Or,

$$\begin{aligned} & y_p' + \frac{1}{x}y_p = \frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}} \\ \iff & \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = \frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}} \\ \iff & C'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

Donc on peut prendre $C(x) = \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}du = \Phi(x)$. Ainsi,

$$y_p(x) = \frac{\Phi(x)}{x} = \Psi(x)$$

Finalement, les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions

$$y(x) = \boxed{\Psi(x) + \frac{C}{x}} \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

/1 **b)** Pour chaque solution de (E) sur $]0, +\infty[$, déterminer sa limite en 0^+.

On a vu en question 4c) que $\lim_{x\to 0}\Psi(x) = 1$. On en déduit que

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\Psi(x) + \frac{C}{x}\right) = \begin{cases} +\infty & \text{si } C > 0 \\ 1 & \text{si } C = 0 \\ -\infty & \text{si } C < 0 \end{cases}$$

/2,5 **c)** Résoudre de même l'équation (E) sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, et étudier pour chaque solution sa limite en 0^-.

Sur $]-\infty, 0[$, l'équation se réécrit :

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

L'équation homogène associée est :

$$(E_H) \quad y' + \frac{1}{x}y$$

Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $x \mapsto \ln|x|$, donc les solutions de (E_H) sont :

$$y_H(x) = Ce^{-\ln|x|} = -\frac{C}{x} \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

On vérifie de même que Ψ est solution particulière de (E). Finalement, les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions

$$\begin{aligned} y(x) &= \Psi(x) - \frac{C}{x} \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R} \\ &= \boxed{\Psi(x) + \frac{C'}{x}} \qquad \text{avec } C' = -C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Les limites en 0^- de ces fonctions sont

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\Psi(x) + \frac{C'}{x}\right) = \begin{cases} +\infty & \text{si } C' > 0 \\ 1 & \text{si } C' = 0 \\ -\infty & \text{si } C' < 0 \end{cases}$$

d) Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, et la déterminer.

/**4**

On raisonne par analyse-synthèse.

— Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de E, alors par les questions a) et c), il existe $C, C' \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad y(x) = \begin{cases} \Psi(x) + \frac{C'}{x} & \text{si } x < 0 \\ \Psi(x) + \frac{C}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

De plus, y vérifie (E) pour $x = 0$, on a $0 + y(0) = 1$, donc $y(0) = 1$. Enfin, comme y est continue en 0, il faut que $\lim_{x \to 0^+} y(x)$ et $\lim_{x \to 0^-} y(x)$ existent et soient finies. Par les questions b) et c), on a donc $C = C' = 0$. D'où $y(x) = \Psi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

— Vérifions que Ψ est bien solution de (E). Ψ Sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, Ψ est bien solution de (E) par les q. a) et c). Par ailleurs, en 0 par la q. 3c), on a $\Psi(0) = 1$, ce qui montre que Ψ vérifie bien (E) au point $x = 0$.

Finalement, l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$ est la fonction $\boxed{\Psi}$.

6) Étude en $+\infty$.

a) Avec une majoration adéquate, établir que

$$\forall x \geq 1 \quad \Phi(x) \leq \Phi(1) + \int_1^x e^{-\frac{u}{2}} du$$

/**5**

On a

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= \int_0^1 e^{-\frac{u^2}{u}} du + \int_1^x e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= \Phi(1) + \int_1^x e^{-\frac{u^2}{2}} du \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que $\int_1^x e^{-\frac{u^2}{2}} du \leq \int_1^x e^{-\frac{u}{2}} du$. Or, pour tout $u \in [1, x]$, on a

$$\begin{aligned} & \frac{u^2}{2} \geq \frac{u}{2} \\ \implies & -\frac{u^2}{2} \leq -\frac{u}{2} \\ \implies & e^{-\frac{u^2}{2}} \leq e^{-\frac{u}{2}} \qquad \text{car exp est croissante} \\ \implies & \int_1^x e^{-\frac{u^2}{2}} du \leq \int_1^x e^{-\frac{u}{2}} du \qquad \text{car } x \geq 1 \end{aligned}$$

b) En déduire que Φ est majorée sur $\mathbb{R}$, puis que Φ admet une limite finie en $+\infty$ (on ne cherchera pas à calculer cette limite).

/**5**

Par la question précédente, pour tout $x \geq 1$

$$\begin{aligned}\Phi(x) &\leq \Phi(1) + \int_1^x e^{-\frac{u}{2}} du \\ &\leq \Phi(1) + \left[-2e^{-\frac{u}{2}}\right]_1^x \\ &\leq \Phi(1) - 2e^{-\frac{x}{2}} + 2\sqrt{e} \\ &\leq \Phi(1) + 2\sqrt{e}\end{aligned}$$

Ainsi, Φ est majorée sur $[1, +\infty[$ par $\Phi(1) + 2\sqrt{e}$. D'où Φ est majorée sur $[1, +\infty[$. Montrons que Φ est majorée sur $]-\infty, 1]$. Comme Φ est croissante par la q. 2), pour tout $x \leq 1$, on a

$$\Phi(x) \leq \Phi(1)$$

de sorte que Φ est majorée sur $]-\infty, 1]$. Ainsi, Φ est majorée sur $\mathbb{R}$. Enfin, comme Φ est croissante et majorée, par le théorème de la limite monotone, elle admet une limite finie en $+\infty$

2 Algèbre : l'endomorphisme $P \mapsto P(X+1) - P(X)$

/37

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, et pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Soit Δ l'application :

$$\Delta : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$$

Par exemple, si $P = X^2$, alors $\Delta(P) = (X+1)^2 - X^2$.

/2 **1)** Vérifier que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Il suffit de montrer que Δ est linéaire. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}[X]$.

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha P + \beta Q) &= (\alpha P + \beta Q)(X+1) - (\alpha P + \beta Q)(X) \\ &= \alpha P(X+1) + \beta Q(X+1) - \alpha P(X) - \beta Q(X) \\ &= \alpha\left[P(X+1) - P(X)\right] + \beta\left[Q(X+1) - Q(X)\right] \\ &= \alpha\Delta(P) + \beta\Delta(Q)\end{aligned}$$

donc Δ est bien linéaire, c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2) On souhaite déterminer $\mathrm{Ker}(\Delta)$.

a) On fait l'hypothèse dans cette question que P est un polynôme non constant de $\mathbb{R}[X]$, appartenant à $\mathrm{Ker}(\Delta)$.

/1 **i)** Justifier que P admet au moins une racine complexe z_0.

Comme P est non constant, par le théorème de d'Alembert-Gauss, P admet au moins une racine complexe.

/4 **ii)** En déduire que P possède une infinité de racines complexes et obtenir une contradiction.

Comme $P \in \mathrm{Ker}(\Delta)$, on a $\Delta(P) = 0$, donc

$$P(X+1) = P(X)$$

— En évaluant en z_0, on trouve que $P(z_0+1) = P(z_0) = 0$, donc $z_0 + 1$ est aussi une racine de P, qu'on note z_1.

— En évaluant en z_1, on trouve que $P(z_1+1) = P(z_1) = 0$, donc $z_1 + 1$ est aussi une racine de P, qu'on note z_2.

Par récurrence immédiate, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_0 + n$ est racine de P. Ainsi, P possède une infinité de racines. D'où P est nul, ce qui contredit le fait que P est supposé non constant.

/2 **b)** En déduire $\mathrm{Ker}(\Delta)$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

— Si P est non constant, alors $\Delta(P) \neq 0$ par ce qui précède, donc $P \notin \mathrm{Ker}(\Delta)$.

— Si P est constant, i.e. $P = a_0$ avec $a_0 \in \mathbb{R}$, alors $P(X+1) = a_0 = P(X)$, d'où $P \in \mathrm{Ker}(\Delta)$.

Finalement, $\mathrm{Ker}(\Delta)$ est l'ensemble des polynômes constants, i.e.

$$\mathrm{Ker}(\Delta) = \boxed{\mathbb{R}_0[X]}$$

3) **a)** Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$. On note $d = \deg P$ et on pose $P = a_d X^d + \ldots + a_1 X + a_0$. Préciser le degré du polynôme
/4,5 $P(X+1) - P(X)$ en fonction de d.

(On donne ici une correction sous une version « condensée » avec des symboles $\sum$, mais une version développée fonctionne également). On a

$$\begin{aligned}
P(X+1)-P(X) &= \sum_{k=0}^{d} a_k (X+1)^k - \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \\
&= \sum_{k=0}^{d} a_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} X^j - \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \\
&= \sum_{j=0}^{d} \left[\sum_{k=j}^{d} a_k \binom{k}{j} \right] X^j - \sum_{j=0}^{d} a_j X^j \\
&= \sum_{j=0}^{d} \left(\sum_{k=j}^{d} a_k \binom{k}{j} - a_j \right) X^j
\end{aligned}$$

Le coefficient d'ordre d (celui en facteur de X^d) est :

$$\sum_{k=d}^{d} a_k \binom{k}{d} - a_d = a_d - a_d = 0$$

Ainsi, $\deg (P(X+1) - P(X)) \leq d - 1$.

— Si $d = 0$, alors $P(X+1) - P(X) = 0$, et donc

$$\deg (P(X+1) - P(X)) = \boxed{-\infty}$$

— Si $d \geq 1$, alors le coefficient d'ordre $d-1$ est :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=d-1}^{d} a_k \binom{k}{d-1} - a_{d-1} \\
=& a_d \times d + a_{d-1} - a_{d-1} \\
=& d a_d
\end{aligned}$$

Or, $d \neq 0$ et $a_d \neq 0$ car $\deg P = d$. Ainsi,

$$\deg (P(X+1) - P(X)) = \boxed{d-1}$$

/1,5 **b)** Justifier que la restriction Δ_n de Δ à $\mathbb{R}_n[X]$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Comme Δ est linéaire, l'application Δ_n est encore linéaire. Il reste à montrer que $\Delta_n : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ est bien définie, i.e. que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\Delta_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Or, par la question précédente,

$$\deg (\Delta_n(P)) \leq \deg P - 1 = n - 1$$

Ainsi, $\Delta_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Finalement Δ_n est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

/4,5 **c)** Déterminer le noyau de Δ_n, puis le rang de Δ_n et en déduire l'image de Δ_n.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\begin{aligned}
& P \in \operatorname{Ker} \Delta_n \\
\iff & \Delta_n(P) = 0 \\
\boxed{\implies} & \Delta(P) = 0 \\
\iff & P \in \operatorname{Ker} \Delta \\
\iff & P \in \mathbb{R}_0[X] \qquad \text{par la q. 2)}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\operatorname{Ker} \Delta_n \subset \mathbb{R}_0[X]$ L'inclusion réciproque est évidente. Finalement,

$$\operatorname{Ker} \Delta_n = \boxed{\mathbb{R}_0[X]}$$

Comme $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, égale à $n+1$, on peut appliquer le **théorème du rang**. On a donc

$$\begin{aligned}
& \dim \mathbb{R}_n[X] = \dim \operatorname{Ker} \Delta_n + \operatorname{rg} \Delta_n \\
\implies & n + 1 = 1 + \operatorname{rg} \Delta_n \\
\implies & \operatorname{rg} \Delta_n = \boxed{n}
\end{aligned}$$

Or, on a vu en q. a) que $\deg(\Delta_n(P)) \leq n-1$, de sorte que $\Delta_n(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Par arbitraire sur P, on a donc $\operatorname{Im}(\Delta_n) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Comme

$$\dim \operatorname{Im} \Delta_n = \operatorname{rg} \Delta_n = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

on en déduit que $\operatorname{Im} \Delta_n = \boxed{\mathbb{R}_{n-1}[X]}$.

/6 **4)** Montrer que Δ est un endomorphisme surjectif, mais pas injectif. En quoi ce n'est pas une contradiction ?

— On a vu en question 2) que $\operatorname{Ker}\Delta = \mathbb{R}_0[X]$. Comme $\operatorname{Ker}\Delta \neq \{0\}$, on en déduit que Δ n'est pas injectif.

— Montrons que Δ est surjectif. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. On pose $n = \max(0, \deg Q)$, de sorte que $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq \deg Q$. Ainsi, $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors, on a $Q \in \mathbb{R}_{N-1}[X]$ avec $N = n+1$. Donc, par la question précédente, on a $Q \in \operatorname{Im}\Delta_N$. Il existe donc $P \in \mathbb{R}_N[X]$ tel que $\Delta_N(P) = Q$, donc $\Delta(P) = Q$. D'où $Q \in \operatorname{Im}\Delta$. Finalement, $\mathbb{R}[X] \subset \operatorname{Im}\Delta$ et l'inclusion réciproque est évidente. D'où $\operatorname{Im}\Delta = \mathbb{R}[X]$ et Δ est par suite surjectif.

Ce n'est pas une contradiction car $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie. Un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ peut donc être surjectif mais pas injectif.

5) Utilisation de Δ_n pour le calcul d'une somme

On suppose dans cette question uniquement que $n = 4$. On note $\mathcal{C} = (1, X, X^2, X^3, X^4)$ la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$.

/2,5 **a)** Déterminer la matrice M_4 de Δ_4 dans la base $\mathcal{C}$.

On a

$$\Delta_4(1) = 1 - 1 = 0$$

$$\Delta_4(X) = X + 1 - X = 1$$

$$\Delta_4(X^2) = (X+1)^2 - X^2 = 2X + 1$$

$$\Delta_4(X^3) = (X+1)^3 - X^3 = 3X^2 + 3X + 1$$

$$\Delta_4(X^4) = (X+1)^4 - X^4 = 4X^3 + 6X^2 + 4X + 1$$

On a donc

$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Trouver cinq réels a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 vérifiant : $M_4 \times \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

/2

C'est un système linéaire dont la matrice augmentée est déjà

échelonnée, on peut donc résoudre le système directement :

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 \\ 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = 0 \\ 3a_3 + 6a_4 = 0 \\ 4a_4 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 \\ 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = 0 \\ 3a_3 + 6a_4 = 0 \\ 4a_4 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_4 = 1/4 \\ a_3 = -2a_4 = -1/2 \\ a_2 = -3a_3/2 - 2a_4 = 3/4 - 2/4 = 1/4 \\ a_1 = -(a_2 + a_3 + a_4) = 0 \end{cases}$$

et comme on ne trouve pas de condition sur a_0, on peut donc prendre par exemple

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = \boxed{\left(0, 0, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)}$$

c) En déduire, pour tout $m \in \mathbb{N}$, une expression factorisée de :

$$S_m = \sum_{k=0}^{m} k^3$$

/7

On pose

$$P = \frac{1}{4}X^2 - \frac{1}{2}X^3 + \frac{1}{4}X^4$$

Par ce qui précède, on a $\Delta_4(P) = X^3$, i.e.

$$P(X+1) - P(X) = X^3$$

Ainsi, pour tout $k \in [\![0, m]\!]$, on a

$$P(k+1) - P(k) = k^3$$

ce qui donne, en sommant pour k allant de 0 à m,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m}(P(k+1)-P(k)) &= \sum_{k=0}^{m}k^3 \\
\implies P(m+1)-P(0) &= S_m \qquad \text{par télescopage} \\
\implies \frac{1}{4}\left((m+1)^2-2(m+1)^3+(m+1)^4\right) &= S_m \\
\implies S_m &= \frac{1}{4}(m+1)^2\times\left(1-2(m+1)+(m+1)^2\right) \\
&= \boxed{\frac{1}{4}(m+1)^2\times m^2}
\end{aligned}$$

3 Analyse : la suite récurrente $u_{n+1}=\sin(u_n)$

/36,5

On note $f : x \mapsto \sin(x)$. On étudie la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in]0,1] \qquad \text{et} \qquad \forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1}=f(u_n)$$

A — Nature de la suite (u_n)

/2,5 **1)** Montrer que pour tout $x\in]0,1]$, on a $0<\sin x<x$.

Comme $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et que sin est strictement croissante sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
&\sin x > \sin 0 \\
\implies &\sin x > 0
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que $\sin x<x$. On pose

$$\begin{aligned}
g :]0,1] &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto x-\sin x
\end{aligned}$$

g est dérivable par différence de telles fonctions et $g'(x)=1-\cos x$. Comme $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos x<1$ donc $g'(x)>0$. Ainsi, g est strictement croissante. Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=0$, on en déduit que $g(x)>0$. Ainsi, on a bien $\sin x<x$.

/1 **2)** En déduire que $u_n\in]0,1]$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Montrons par récurrence que $u_n\in]0,1]$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

— Pour $n=0$, on sait par hypothèse que $u_0\in]0,1]$, donc la propriété est vraie au rang 0.

— Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose que $u_n\in]0,1]$. Montrons que $u_{n+1}\in]0,1]$. Comme $u_n\in]0,1]$, par la question précédente, on a

$$0<\sin u_n<u_n$$

d'où on a

$$0<u_{n+1}<u_n\leq 1$$

si bien que $u_{n+1}\in]0,1]$.

Finalement, $u_n\in]0,1]$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

/1 **3)** Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

Comme vu en question précédente, on a $u_{n+1}<u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Ainsi, (u_n) est strictement décroissante.

/3 **4)** En déduire que (u_n) converge, et déterminer sa limite.

Par les questions précédentes, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc par le théorème de la limite monotone, elle converge vers une limite qu'on note ℓ.

De plus, comme pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $0<u_n\leq 1$, en passant à la limite, on a $0\leq\ell\leq 1$. De plus, en passant à la limite dans $u_{n+1}=f(u_n)$, on obtient, par continuité de f, que $\ell=f(\ell)=\sin\ell$.

— Si $\ell\in]0,1]$, alors par la q. 1), on sait que si $\sin\ell<\ell$, ce qui contredit le fait que $\ell=\sin\ell$. Ce cas est donc impossible.

— On a donc nécessairement $\ell=\boxed{0}$

B — Équivalent de (u_n)

/3,5 **5)** Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$.

Soit $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right[\cup\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$. On a

$$\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}$$

Or, $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$, de sorte que $x^2 \sin^2 x \underset{x\to 0}{\sim} x^4$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)^2 \\ &= x^2 - \frac{x^4}{3} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$x^2 - \sin^2 x = \frac{x^4}{3} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$$

D'où

$$x^2 - \sin^2 x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^4}{3}$$

On en déduit que

$$\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{1}{3}x^4}{x^4} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

/2 **6)** En déduire que $\lim \left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}\right) = \frac{1}{3}$.

Par la question précédente et la q. 3), on a

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Donc, par composition de limite, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sin^2(u_n)} - \frac{1}{u_n^2}\right) = \frac{1}{3}$$

ce qui se réécrit, puisque $\sin(u_n) = u_{n+1}$:

$$\lim \left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}\right) = \boxed{\frac{1}{3}}$$

7) Dans la suite du problème, on pose $a_n = \frac{1}{u_n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

/1,5 **a)** Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$,

$$\frac{1}{3} - \frac{\varepsilon}{2} \leq a_{k+1} - a_k \leq \frac{1}{3} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Par ce qui précède, on a $\lim \left(a_{n+1} - a_n\right) = \frac{1}{3}$. Par définition de la limite, à $\varepsilon > 0$ fixé, il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$,

$$\begin{aligned} &\left|a_{k+1} - a_k - \frac{1}{3}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \Longrightarrow\ &-\frac{\varepsilon}{2} \leq a_{k+1} - a_k - \frac{1}{3} \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \Longrightarrow\ &\boxed{\frac{1}{3} - \frac{\varepsilon}{2} \leq a_{k+1} - a_k \leq \frac{1}{3} + \frac{\varepsilon}{2}} \end{aligned}$$

/4 **b)** Soit $n \geq N + 1$. Déduire de la question précédente un encadrement de a_n en fonction de a_N, n, N et ε.

Par ce qui précède, pour tout $k \in [\![N, n-1]\!]$, on a

$$\frac{1}{3} - \frac{\varepsilon}{2} \leq a_{k+1} - a_k \leq \frac{1}{3} + \frac{\varepsilon}{2}$$

En sommant ces inégalités pour k allant de N à $n-1$, on obtient :

$$\begin{aligned} &\sum_{k=N}^{n-1} \left(\frac{1}{3} - \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \sum_{k=N}^{n-1} \left(a_{k+1} - a_k\right) \leq \sum_{k=N}^{n-1} \left(\frac{1}{3} + \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ \Longrightarrow\ &(n-N)\left(\frac{1}{3} - \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq a_n - a_N \leq (n-N)\left(\frac{1}{3} + \frac{\varepsilon}{2}\right) \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{a_N + (n-N)\left(\frac{1}{3} - \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq a_n \leq a_N + (n-N)\left(\frac{1}{3} + \frac{\varepsilon}{2}\right)}$$

/7 **c)** En déduire que $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.

On a

$$\begin{aligned} & u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}} \\ \iff & \frac{1}{u_n} \sim \sqrt{\frac{n}{3}} \\ \iff & a_n = \frac{1}{u_n^2} \sim \frac{n}{3} \\ \iff & \frac{a_n}{n} \to \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que $\frac{a_n}{n} \to \frac{1}{3}$. On repart de l'encadrement obtenu précédemment. On a :

$$\begin{aligned} & \frac{a_N + (n-N)\left(\frac{1}{3} - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{n} \leq \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_N + (n-N)\left(\frac{1}{3} + \frac{\varepsilon}{2}\right)}{n} \\ \implies & \frac{1}{3} - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{a_N - N\left(\frac{1}{3} - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{n} \leq \frac{a_n}{n} \leq \left(\frac{1}{3} + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{a_N - N\left(\frac{1}{3} + \frac{\varepsilon}{2}\right)}{n} \end{aligned}$$

Or, N étant fixé, on a

$$\frac{a_N - N\left(\frac{1}{3} \pm \frac{\varepsilon}{2}\right)}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Il existe donc $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, on a :

$$\frac{a_N - N\left(\frac{1}{3} - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{n} \geq -\frac{\varepsilon}{2}$$

et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$, on a :

$$\frac{a_N - N\left(\frac{1}{3} + \frac{\varepsilon}{2}\right)}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi, en posant $N = \max(N, N_1, N_2)$, pour tout $n \geq N$, on a :

$$\frac{1}{3} - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{a_n}{n} \leq \left(\frac{1}{3} + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2}$$

donc

$$\frac{1}{3} - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{a_n}{n} \leq \left(\frac{1}{3} + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2}$$

ou encore

$$\left|\frac{a_n}{n} - \frac{1}{3}\right| \leq \varepsilon$$

On reconnait la définition de la limite, si bien que $\frac{a_n}{n} \to \frac{1}{3}$, donc $u_n \sim \boxed{\sqrt{\frac{3}{n}}}$.

C — Développement asymptotique de (u_n)

/6 **5)** Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$.

Soit $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} &= \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} \\ &= \frac{x^2\left(1 - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right)}{x^4\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} \\ &= \frac{1}{x^2} \times \left(\frac{1}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} - 1\right) \end{aligned}$$

(À cause du terme en $\frac{1}{x^2}$, il nous faut aller à l'ordre 4 pour avoir un $\mathrm{DL}_2(0)$ à la fin). On a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 &= \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \underset{x \to 0}{o}\left(x^4\right)\right)^2 \\ &= 1 - 2\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{36} + 2\frac{x^4}{120} + \underset{x \to 0}{o}\left(x^4\right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{12} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \underset{x \to 0}{o}\left(x^4\right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{8x^4}{12 \times 15} + \underset{x \to 0}{o}\left(x^4\right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2}{45}x^4 + \underset{x \to 0}{o}\left(x^4\right) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} - 1 = \frac{1}{1 - X} - 1$$

avec $X = \frac{x^2}{3} - \frac{2}{45}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$. Comme $X \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} - 1 &= 1 + X + X^2 + \underset{X\to 0}{o}\left(X^2\right) - 1 \\
&= \frac{x^2}{3} - \frac{2}{45}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right) + \left(\frac{x^2}{3} - \frac{2}{45}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\right)^2 \\
&= \frac{x^2}{3} - \frac{2}{45}x^4 + \frac{x^4}{9} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right) \\
&= \frac{x^2}{3} + \frac{3x^4}{45} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right) \\
&= \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{15} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)
\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \boxed{\frac{1}{3} + \frac{1}{15}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}$$

6) En déduire que $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3} + \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ pour une constante $\beta > 0$
/3 que l'on précisera.

On part du DL obtenu précédemment, et on compose à droite en posant $x = u_n$, qui tend bien vers 0 quand n tend vers $+\infty$. D'où :

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}u_n^2 + \underset{X\to 0}{o}\left(u_n^2\right)$$

Or, comme $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$, on a $u_n^2 \sim \frac{3}{n}$, donc $u_n^2 = \frac{3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Ainsi :

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

ce qui est le résultat voulu avec $\beta = \boxed{\frac{1}{5}}$

7) On pose $b_n = a_n - \frac{n}{3}$ pour tout $n \geq 1$.

/1 **a)** Déterminer un équivalent simple de $b_{n+1} - b_n$.

$$\begin{aligned}
b_{n+1} - b_n &= a_{n+1} - \frac{n+1}{3} - a_n + \frac{n}{3} \\
&= a_{n+1} - a_n - \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{5n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&\sim \boxed{\frac{1}{5n}}
\end{aligned}$$

b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On admet l'encadrement suivant, pour tout $n \geq N+1$:

$$\ln\left(\frac{n}{N}\right) \leq \sum_{k=N}^{n-1} \frac{1}{k} \leq \ln\left(\frac{n}{N}\right) + \frac{1}{N}$$

/7 Montrer que $b_n \sim \frac{\ln n}{5}$.

Par ce qui précède, on a $nb_{n+1} - nb_n \to \frac{1}{5}$, donc par définition de la limite, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k \geq N$, on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{5} - \frac{\varepsilon}{2} \leq kb_{k+1} - kb_k \leq \frac{1}{5} + \frac{\varepsilon}{2} \\
\Longrightarrow\ &\frac{1}{5k} - \frac{\varepsilon}{2k} \leq b_{k+1} - b_k \leq \frac{1}{5k} + \frac{\varepsilon}{2k} \quad \text{car } k \geq 1
\end{aligned}$$

On fixe $n \geq N+1$. En sommant ces inégalités pour k allant de N à $n-1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=N}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{5} - \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq b_n - b_N \leq \sum_{k=N}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{5} + \frac{\varepsilon}{2}\right) \\
\Longrightarrow\ & b_N + \left(\frac{1}{5} - \frac{\varepsilon}{2}\right)\sum_{k=N}^{n-1} \frac{1}{k} \leq b_n \leq b_N + \left(\frac{1}{5} + \frac{\varepsilon}{2}\right)\sum_{k=N}^{n-1} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

En supposant $\varepsilon < \frac{1}{10}$, on a $\frac{1}{5} - \frac{\varepsilon}{2} > 0$, ce qui permet de minorer le membre de gauche :

$$b_N + \left(\frac{1}{5} - \frac{\varepsilon}{2}\right)\ln\left(\frac{n}{N}\right) \leq b_n \leq b_N + \left(\frac{1}{5} + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left[\ln\left(\frac{n}{N}\right) + \frac{1}{N}\right]$$

Ainsi, comme $\ln n > \ln N \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{5} - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{\ln n}\left(b_N - \ln N \times \left(\frac{1}{5} - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)\\ <&\frac{b_n}{\ln n}\\ <&\frac{1}{5} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{\ln n}\left(b_N - \ln N \times \left(\frac{1}{5} + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{1}{N}\right)\end{aligned}$$

On remarque que

$$\frac{1}{\ln n}\left(b_N - \ln N \times \left(\frac{1}{5} \pm \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Or, de même qu'en question 7c), quitte à poser $N' \in \mathbb{N}$ assez grand, on obtient pour tout $n \geq N'$

$$\left|\frac{1}{\ln n}\left(b_N - \ln N \times \left(\frac{1}{5} - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{et} \quad \left|\frac{1}{\ln n}\left(b_N - \ln N \times \left(\frac{1}{5} + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{1}{N}\right)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

de sorte que

$$\frac{1}{5} - \varepsilon \leq \frac{b_n}{\ln n} \leq \frac{1}{5} + \varepsilon$$

(et ce pour tout $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{10}\right[$, donc pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit). Ainsi,

$$\frac{b_n}{\ln n} \to \frac{1}{5}$$

ce qui conduit à $\dfrac{5b_n}{\ln n} \to 1$, et donc

$$b_n \sim \boxed{\frac{\ln n}{5}}$$

/4 **c)** En déduire un développement asympotique à 2 termes de a_n, puis de u_n.

Par ce qui précède, on a $b_n = \dfrac{1}{5}\ln n + o(\ln n)$. Ainsi :

$$a_n = b_n + \frac{n}{3} = \boxed{\frac{n}{3} + \frac{\ln n}{5} + o(\ln n)}$$

D'où

$$\frac{1}{u_n^2} = \frac{n}{3} + \frac{\ln n}{5} + o(\ln n)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}u_n &= \left(\frac{n}{3} + \frac{\ln n}{5} + o(\ln n)\right)^{-\frac{1}{2}}\\ &= \left(\frac{n}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{3\ln n}{5n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\\ &= \sqrt{\frac{3}{n}} \times (1+X)^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

avec $X = \dfrac{3\ln n}{5n} + o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right) \to 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}u_n &= \sqrt{\frac{3}{n}} \times \left(1 - \frac{1}{2}X + \underset{X\to 0}{o}(X)\right)\\ &= \sqrt{\frac{3}{n}} \times \left(1 - \frac{3}{10} \times \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)\\ &= \boxed{\sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3}{10} \times \frac{\ln n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\right)}\end{aligned}$$

Fin du sujet